

Testowanie hipotez

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 10

Plan wykładu

- ▶ 1. Kombinacja liniowa parametrów
- ▶ 2. Testowanie hipotez prostych
 - Rozkład estymatora \mathbf{b}
 - Testowanie hipotez prostych przy użyciu statystyki t
 - Przedziały ufności

Plan wykładu

- ▶ 1. Kombinacja liniowa parametrów
- ▶ 2. Testowanie hipotez prostych
 - Rozkład estymatora \mathbf{b}
 - Testowanie hipotez prostych przy użyciu statystyki t
 - Przedziały ufności

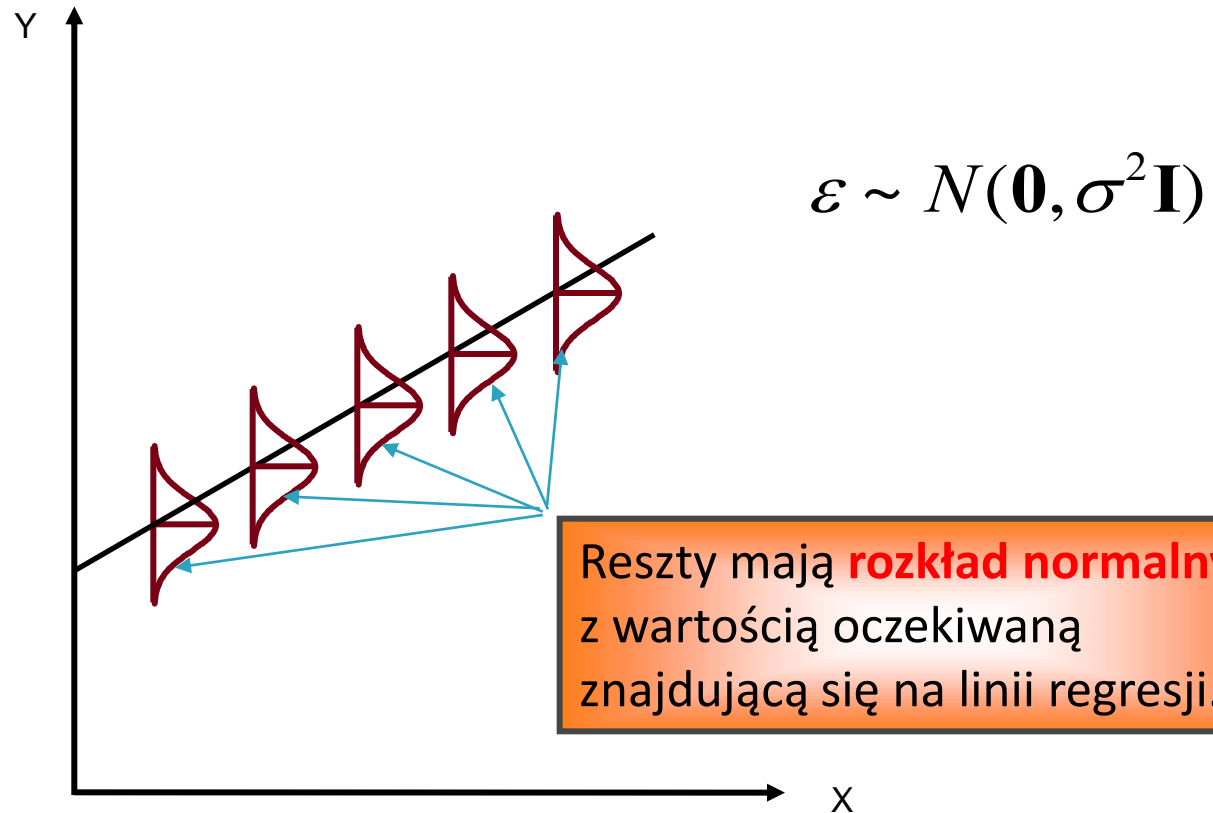
Plan wykładu

- ▶ 1. Kombinacja liniowa parametrów
- ▶ 2. Testowanie hipotez prostych
 - Rozkład estymatora \mathbf{b}
 - Testowanie hipotez prostych przy użyciu statystyki t
 - Przedziały ufności

Testowanie hipotez

- ▶ Badamy czy hipotezy teoretyczne (wynikające z teorii) znajdują potwierdzenie w danych
- ▶ Hipotezy narzucają pewne ograniczenia na wartości parametrów
- ▶ Oszacowania parametrów powinny spełniać te ograniczenia w przybliżeniu
- ▶ Jeśli oszacowania parametrów odbiegają od postulowanych związków wynikających z teorii to odrzucamy hipotezę jako sprzeczną z danymi
- ▶ Uwzględnienie w modelu wiedzy z hipotezy prawdziwej poprawia precyzję oszacowań
- ▶ Uwzględnienie w modelu wiedzy z hipotezy fałszywej prowadzi do obciążenia estymatora
- ▶ Do testowania hipotez wykorzystujemy testy statystyczne

Dodatkowo założenie klasycznego modelu regresji liniowej



Testowanie hipotez prostych

- ▶ Rozkład estymatora \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1})$$

- ▶ Rozkład pojedynczego elementu tego wektora b_k :

$$b_k \sim N(\beta_k, [\Sigma_b]_{kk})$$

Testowanie hipotez prostych

- ▶ Korzystając z rozkładu \mathbf{b}_k :

$$\frac{b_k - \beta_k}{\sqrt{[\Sigma_b]_{kk}}} = \frac{b_k - \beta_k}{se(b_k)} \sim N(0,1)$$

- ▶ Tej statystyki nie da się policzyć ponieważ macierz Σ_b jest nieznana
- ▶ Oszacowaniem tej macierzy jest $\hat{\Sigma}_b$ ale zastosowanie jej w powyższym wzorze wpłynie na rozkład statystyki
- ▶ Tak zmodyfikowana statystyka (będziemy ją nazywać \mathbf{t}) będzie miała rozkład t-studenta

Testowanie hipotez prostych

- ▶ Hipoteza prosta: dotyczy pojedynczego parametru modelu albo kombinacji liniowej parametrów
- ▶ Załóżmy, że $H_0: \beta_k = \beta_k^*$, spełnione są założenia KMRL i H_0 jest prawdziwa, wtedy

$$t = \frac{b_k - \beta_k^*}{\frac{\Lambda}{se(b_k)}} \sim t_{N-K}$$

Testowanie hipotez prostych

- ▶ Najczęściej testujemy $H_0: \beta_k = \beta_k^*$ przy hipotezie alternatywnej $H_1: \beta_k \neq \beta_k^*$ stosując dwustronny obszar krytyczny
- ▶ Możliwe także jest testowanie $H_0: \beta_k = \beta_k^*$ przy hipotezie alternatywnej $H_1: \beta_k > \beta_k^*$ lub $H_1: \beta_k < \beta_k^*$ używając jednostronnych obszarów krytycznych

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- ▶ Testowanie prostych hipotez przebiega w następujących krokach:

- ▶ Dla modelu:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_K X_{Ki} + \varepsilon_i$$

- ▶ którego oszacowaniem jest:

$$\hat{y}_i = b_1 + b_2 X_{2i} + \dots + b_K X_{Ki}$$

- ▶ **Krok 1.** Stawiamy tak zwaną hipotezę zerową co do wartości nieznanego parametru β_K

$$H_0 : \beta_K = 0 \quad (\text{zmienna } X_{Ki} \text{ jest nieistotna})$$

- ▶ Hipotezie tej towarzyszy hipoteza alternatywna:

$$H_1 : \beta_K \neq 0 \quad (\text{zmienna } X_{Ki} \text{ jest istotna})$$

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

Krok 2. Przy założeniu, że postawiona hipoteza zerowa jest prawdziwa, wyznaczamy statystykę testową z rozkładu *t - Studenta* o **N - K** stopniach swobody postaci:

$$t = \frac{b_K}{\frac{\Lambda}{se(b_K)}}$$

Gdzie:

$\frac{\Lambda}{se(b_K)}$ - odchylenie standardowe estymatora b_K

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

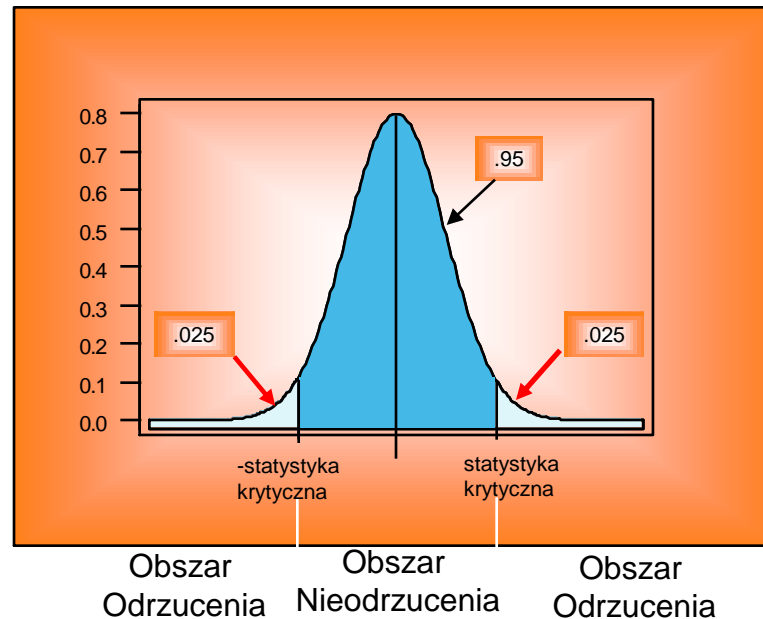
Krok 3. Odczytujemy z tablic rozkładu *t-Studenta* wartość krytyczną (α - poziom istotności¹⁾)

$$t^* = t \left(\underbrace{N - K}_{\text{Stopni swobody}}; \underbrace{1 - \frac{\alpha}{2}}_{\text{Rząd kwantyla}} \right)$$

¹⁾ maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu polegającego na odrzuceniu prawdziwej hipotezy zerowej

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

Krok 4. Podjęcie decyzji



- ✓ $|t| \geq t^*$ - odrzucamy hipotezę zerową, czyli zmienna X_{ki} jest istotna.
- ✓ $|t| < t^*$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, czyli zmienna X_{ki} jest nieistotna.

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

► Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wykształcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS	Number of obs =	26352
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10	F(9, 26342) =	66.80
Residual	1.6457e+13	26342	624728699	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.0223
				Adj R-squared =	0.0220
Total	1.6832e+13	26351	638768004	Root MSE =	24995

wynagrodzenie	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546	-1158.391
_Iwykształ~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783	-3046.944
_Iwykształ~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401	-4858.211
_Iwykształ~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893	-7112.099
_Iwykształ~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9	-8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183	28.37312
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173	-69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71	14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138	-6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9	20890.3

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- ▶ W popularnych pakietach ekonometrycznych obok wyliczonej wartości statystyki t podawane jest również odpowiadające mu **prawdopodobieństwo p** , że $\beta_k = 0$. Oznaczone ono jest z angielskiego przez *p-value*.
- ▶ W przypadku hipotez dwustronnych:

$$p = 2[1 - F(k^*)]$$

gdzie: F - dystrybuanta rozkładu, k^* - wartość statystyki testowej

- ▶ W przypadku hipotez jednostronnych:

$$p = 1 - F(k^*)$$

gdzie: F - dystrybuanta rozkładu, k^* - wartość statystyki testowej

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- ✓ Jeśli $p\text{-value} < \alpha$ (poziomu istotności), to odrzucamy hipotezę zerową.
- ✓ Jeśli $p\text{-value} > \alpha$ (poziomu istotności), to brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

► Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wykształcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS	Number of obs =	26352
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10	F(9, 26342) =	66.80
Residual	1.6457e+13	26342	624728699	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.0223
				Adj R-squared =	0.0220
Total	1.6832e+13	26351	638768004	Root MSE =	24995

wynagrodze~e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546	-1158.391
_Iwyksztal~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783	-3046.944
_Iwyksztal~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401	-4858.211
_Iwyksztal~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893	-7112.099
_Iwyksztal~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9	-8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183	28.37312
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173	-69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71	14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138	-6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9	20890.3

Przedziały ufności dla parametrów

- ▶ Jaki jest przedział, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajdzie się nieznana wartość parametru β_K . Odpowiedź na to pytanie uzyskamy wyznaczając tak zwany przedział ufności.
- ▶ Przedział ufności pozwala na sprawdzenie precyzji oszacowań
- ▶ Przedział ufności dla nieznanego parametru β_K na poziomie ufności $1 - \alpha$ budujemy w oparciu o wzór:

$$\Pr(|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Pr\left(\left|\frac{b_k - \beta_k}{\frac{\Lambda}{se(b_k)}}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - 2[1 - F_{t_{N-K}}(t_{1-\frac{\alpha}{2}})] = 1 - \alpha$$

Przedziały ufności dla parametrów

- ▶ Na podstawie ostatniego równania znajdujemy:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{t_{N-K}} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

- ▶ Przedział ufności uzyskujemy:

$$\Pr \left(\left| \frac{b_k - \beta_k}{\overset{\Lambda}{se}(b_k)} \right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \Pr(|b_k - \beta_k| < t_{1-\alpha/2} \overset{\Lambda}{se}(b_K)) =$$

$$\Pr(b_K - t_{1-\alpha/2} \overset{\Lambda}{se}(b_K) \leq \beta_K \leq b_K + t_{1-\alpha/2} \overset{\Lambda}{se}(b_K))$$

Przedziały ufności dla parametrów

► Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wykształcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS	Number of obs =	26352
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10	F(9, 26342) =	66.80
Residual	1.6457e+13	26342	624728699	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.0223
				Adj R-squared =	0.0220
Total	1.6832e+13	26351	638768004	Root MSE =	24995

wynagrodze~e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546	-1158.391
_Iwyksztal~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783	-3046.944
_Iwyksztal~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401	-4858.211
_Iwyksztal~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893	-7112.099
_Iwyksztal~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9	-8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183	28.37212
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173	-69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71	14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138	-6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9	20890.3

Przedziały ufności dla parametrów

- ▶ Przedział ufności dla wieku przy $\alpha = 0,05$

$$\Pr(b_K - t_{1-\alpha/2} \overset{\Lambda}{se}(b_K) \leq \beta_K \leq b_K + t_{1-\alpha/2} \overset{\Lambda}{se}(b_K))$$

$$t_{1-\alpha/2} = F_{t_{26342}}^{-1}(0,975) \sim 1,95$$

- ▶ $-95,59 - 13,53 * 1,95 \sim -121,97$
- ▶ $-95,59 + 13,53 * 1,95 \sim -69,20$

Pytania teoretyczne

1. Podać postać estymatora dla kombinacji liniowej $\delta' \beta$ i udowodnić, że jest on nieobciążony.
2. Wyprowadzić rozkład małopróbkowy estymatora MNK. Jakie założenie, poza standardowymi założeniami KMRL, należy w tym przypadku przyjąć?
3. Jaką postać ma statystyka służąca do testowania hipotezy o tym, że $\beta_k = \beta_k^*$.
4. Mając oszacowanie b_k oraz oszacowanie odchylenia standardowego tego oszacowania $se(b_k)$ wyjaśnić, w jaki sposób należy zbudować przedział ufności dla parametru β_k . Ilość obserwacji wynosi N , ilość szacowanych parametrów K , a poziom ufności $1 - \alpha$.

Pytania teoretyczne

5. (*) Udowodnić, że rozkład sumy kwadratów reszt jest rozkładem χ^2_{N-K} niezależnym od rozkładu **b**.

Dziękuję za uwagę