

Modele dynamiczne

- Celem szacowania modeli dynamicznych jest opisanie zachowania zjawiska ekonomicznego w czasie
- Można wyróżnić następujące własności dynamiczne, które stanowią obiekt zainteresowania ekonomistów:
 - istnienie oraz własności równowagi długookresowej
 - szybkość dochodzenia do równowagi długookresowej
 - rozłożenie w czasie reakcji na egzogeniczne szoki (np. instrumenty polityki gospodarczej)

– sezonowość

- Dodatkową przyczyną, dla której warto jest badać własności dynamiczne modelu jest analiza przyczynowości i prognozowanie
- Prognozowanie jest możliwe tylko wtedy, gdy uda nam się zidentyfikować zmienne (przyczyny), których zmiany po pewnym czasie powodują zmiany w innych zmiennych.
- W modelach dynamicznych wystąpienie autokorelacji świadczy o tym, że nie udało się wytłumaczyć w pełni dynamiki zmiennej zależnej

Model o rozłożonych opóźnieniach (*DL*)

- Model, w którym występuje jedynie część *DL* (**D**istributed **L**ags)
- Prosty w analizie ponieważ jeśli x_t nielosowe
- Opóźnione x_t są także nielosowe
- Model może spełniać założenia *KMRL*.

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \dots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

- W przypadku modeli dynamicznych współczynniki przy zmiennych objaśniających opisują reakcję zmiennej zależnej z okresu t na zmiany zmiennych niezależnych z okresu t oraz okresów wcześniejszych
- W związku z tym przy interpretacji tych współczynników modelu należy dokładnie określić czy chodzi nam o:
 - zależności między zmiennymi w położeniu równowagi
 - natychmiastową (krótkookresową) reakcję zmiennej zależnej na zmianę w zmiennej niezależnej
- Wielkość natychmiastowej reakcję y_t na zmianę jednostkową zmianę x_t nazywamy mnożnikiem bezpośrednim (*impact*)

multiplier)

- Jeśli x_t pozostanie na tym wyższym poziomie także w τ kolejnych okresach, to wielkość reakcja y_t na taką zmianę x_t nazywamy mnożnikiem skumulowanym (*cumulated multiplier*)
- Wielkość wpływu trwałej zmiany x_t na y_t nazywamy mnożnikiem długookresowym (*long-run multiplier*)
- W przypadku modeli *DL*:
 - Wpływ zmiany x_t o Δx_t powoduje zmianę y_t o Δy_t równą:

$$\begin{aligned} E(y_t + \Delta y_t) &= \mu + \beta_0(x_t + \Delta x_t) + \dots + \beta_p x_{t-p} \\ &= E(y_t) + \beta_0 \Delta x_t \end{aligned}$$

Wpływ ten mierzymy *mnożnikiem bezpośrednim*:

$$\frac{E(\Delta y_t)}{\Delta x_t} = \beta_0$$

– Wpływ zmiany x o Δx , która nastąpiła τ okresów temu

powoduje zmianę y_t o Δy_t równą

$$\begin{aligned} E(y_t + \Delta y_t) &= \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \dots + \beta_\tau(x_{t-\tau} + \Delta x) \\ &\quad + \beta_{\tau+1}x_{t-\rho+1} + \dots + \beta_\tau x_{t-p} \\ &= E(y_t) + \left(\sum_{i=0}^{\tau} \beta_i \right) \Delta x \end{aligned}$$

Zmianę tę mierzymy *mnożnikiem skumulowanym*:

$$\beta_\tau = \frac{E(\Delta y_{t+\tau})}{\Delta x} = \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i$$

– Długookresowy wpływ zmiany x o Δx mierzymy *mnożnikiem*

długookresowym. Jest on równy mnożnikowi skumulowanemu dla $\tau \rightarrow \infty$

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \beta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i$$

- Miarą szybkości reakcji zmiennej zależnej na zmiany zmiennych niezależnych jest średnie opóźnienie: $\bar{w} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\beta_i}{\beta}$

Exercise 1. *Związek między bezrobociem w/g BAEŁ a podażą pieniądza wyrażeniu nominalnym (zmiana podaży pieniądza wyrażona w procentach - zmienna m3p).*

Wybór ilości opóźnień (metoda od ogólnego do szczegółowego):
założmy, że największą sensowną ilością opóźnień jest 6.

-----		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----							
m3p							
--		-.2284744	.1149244	-1.99	0.056	-.4635211	.0065723
L1		-.2218003	.1192405	-1.86	0.073	-.4656745	.0220739
L2		-.2727794	.1166159	-2.34	0.026	-.5112856	-.0342732
L3		-.2606365	.0965898	-2.70	0.011	-.4581849	-.0630882
L4		-.1721529	.1082111	-1.59	0.122	-.3934693	.0491636
L5		-.0142759	.1108159	-0.13	0.898	-.2409199	.2123681
L6		-.0176795	.1072485	-0.16	0.870	-.2370272	.2016683
_cons		20.51169	.5000556	41.02	0.000	19.48897	21.53442

- $\beta_6 = 0$: $F(1, 29) = 0.03$ [0.8702]
AIC: 3.945
BIC: 25.231
- $\beta_6 = \beta_5 = 0$: $F(2, 29) = 0.02$ [0.9825]
AIC: 3.904
BIC: 21.588
- $\beta_6 = \beta_5 = \beta_4 = 0$: $F(3, 29) = 0.90$ [0.4513]
AIC: 3.951

BIC: 21.188

- $\beta_6 = \beta_5 = \beta_4 = \beta_3 = 0$: $F(4, 29) = 2.46[0.0673]$

AIC: 4.088

BIC: 24.396

- Kryterium informacyjne *AIC* sugeruje wybór 4 opóźnień, *BIC* sugeruje wybór 3 opóźnień
- Testowanie od ogólnego do szczegółowego na poziomie istotności $\alpha = 10\%$ - sugeruje 3 opóźnienia
- Wybieramy 3 opóźnienia

Source	SS	df	MS	Number of obs = 40			
Model	376.021652	4	94.005413	F(4, 35)	=	30.27	
Residual	108.707887	35	3.10593963	Prob > F	=	0.0000	
Total	484.729539	39	12.4289625	R-squared	=	0.7757	
				Adj R-squared	=	0.7501	
				Root MSE	=	1.7624	

bael	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
m3p						
--	-.2819283	.0991632	-2.84	0.007	-.4832404	-.0806162
L1	-.2017262	.0938015	-2.15	0.038	-.3921533	-.0112991
L2	-.2861484	.0944252	-3.03	0.005	-.4778417	-.094455
L3	-.2836885	.09924	-2.86	0.007	-.4851565	-.0822205
_cons	20.05402	.5144917	38.98	0.000	19.00954	21.09849

- Zgodnie IS/LM ekspansja pieniężna powinna powodować

spadek bezrobocia.

- Mnożnik bezpośredni zmiany podaży pieniądza (zmiana bezrobocia w reakcji na 1% wzrost podaży pieniądza):

$$\beta_0 = -.2819283$$

- Mnożnik długookresowy zmiany podaży pieniądza (zmiana bezrobocia jeśli wzrost podaży pieniądza zostanie trwale przyspieszony o 1%)

$$\beta = -.2819283 - .2017262 - .2861484 - .2836885 = -1.0535$$

- Mnożnik długookresowy około 4 razy większy niż krótkookresowy!

- Średnie opóźnienie

$$\bar{w} = \frac{1}{1.0535} (.2017262 + 2 \times .2861484 + 3 \times .2836885) = 1.5426$$

- Ponieważ model jest na danych kwartalnych oznacza to średnie opóźnienie reakcji bezrobocia na zmianę tempa wzrostu podaży pieniądza o około 1.5 kwartału.
- Za pomocą tego modelu nie udało się jednak uchwycić w pełni dynamiki reakcji bezrobocia na zmiany podaży pieniądza - świadczy o tym wynik testu Breuscha-Godfrey

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)		chi2	df	Prob > chi2
1		20.953	1	0.0000
H0: no serial correlation				

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (*ADL*)

- Często okazuje się, że wprowadzając do modelu jako zmienną objaśniającą, opóźnioną zmienną zależną uzyskuje się model o lepszym dopasowaniu i mniejszej ilości parametrów
- Można to wytłumaczyć między innymi tym, że wiele zjawisk ekonomicznych charakteryzuje się sporą inercją
- Model, w którym występują opóźnione zmienne zależne nazywamy modelem autoregresyjnym

- Ogólną klasą takich modeli są modele *ADL* (**A**utoregressive **D**istributed **L**ags) postaci

$$y_t = \underbrace{\alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p}}_{AR} + \underbrace{\mu + x_t \beta_0 + x_{t-1} \beta_1 + \dots + x_{t-s} \beta_s}_{DL} + \varepsilon_t$$

Mnożnik bezpośredni i długookresowy w *ADL*

- Tak samo jak w przypadku modeli *DL* interesują nas dwa typy mnożników: bezpośredni i długookresowy.
- Mnożnik bezpośredni mierzy wpływ zmiany x_t o Δx_t na oczekiwany poziom y_t . Oznaczmy zmianę y_t jako Δy_t .

$$E(y_t + \Delta y_t) = E(y_t) + \Delta x_t \beta_0$$

$$\frac{E(\Delta y_t)}{\Delta x_t} = \beta_0$$

a więc mnożnik krótkookresowy jest równy β_0

- Zmieniamy $x_t, x_{t-1}, \dots$ o Δx . W tym przypadku oczekiwana zmiana Δy_t

$$\begin{aligned} E(y_t + \Delta y_t) &= \alpha_1 E(y_{t-1} + \Delta y_{t-1}) + \dots + \alpha_p E(y_{t-p} + \Delta y_{t-p}) \\ &\quad + \mu + (x_t + \Delta x) \beta_0 \\ &\quad + (x_{t-1} + \Delta x) \beta_1 + \dots + (x_{t-s} + \Delta x) \beta_s \end{aligned}$$

jest równa

$$\begin{aligned} E(\Delta y_t) &= \alpha_1 E(\Delta y_{t-1}) + \dots + \alpha_p E(\Delta y_{t-p}) \\ &\quad + \Delta x (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s) \end{aligned}$$

- Wpływ zmiany x na y w długim okresie stabilizuje się:

$$E(\Delta y) = E(\Delta y_t) = E(\Delta y_{t-1}) = \dots = E(\Delta y_{t-p})$$

- Długookresowy mnożnik β jest więc równy

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \beta = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

Przykład Bezrobocie i podaż pieniądza (kontynuacja).
Wprowadzamy do modelu opóźnioną zmienną zależną bezrobocie
i usuwamy nieistotne opóźnienia:

Source	SS	df	MS	Number of obs = 42			
Model	452.505732	2	226.252866	F(2, 39)	=	246.00	
Residual	35.8693916	39	.91972799	Prob > F	=	0.0000	
				R-squared	=	0.9266	
				Adj R-squared	=	0.9228	
Total	488.375123	41	11.9115884	Root MSE	=	.95902	

	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
bael						
bael L1	.8508812	.0571166	14.90	0.000	.735352	.9664103
m3p	-.1570696	.0519469	-3.02	0.004	-.2621422	-.051997
_cons	3.015409	1.04154	2.90	0.006	.9086948	5.122124

- Uzyskany model przy mniejszej liczbie parametrów charakteryzuje się lepszym dopasowaniem
- Mnożnik bezpośredni zmiany podaży pieniądza: $\beta_0 = -0.1570696$
- Mnożnik długookresowy podaży pieniądza: $\beta = \frac{-0.1570696}{1-0.8508812} = -1.0533$
- Mnożnik długookresowy wyszedł prawie taki sam jak w modelu bez części autoregresyjnej!
- Wynik testu Breusch-Godfrey:

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)		chi2	df	Prob > chi2
1		0.309	1	0.5782
H0: no serial correlation				

- Dynamika wygląda na dobrze opisaną!

Stan równowagi długookresowej

- Stan równowagi długookresowej (rozwiązanie długookresowe) jest to stan, w którym wartość oczekiwana zmiennej zależnej pozostaje stała w czasie o ile nie zmieniają się zmienne niezależne.
- Rozwiązanie długookresowe jest bardzo ważne z punktu widzenia teorii ekonomii ponieważ większość teorii ekonomicznych dotyczy relacji między zmiennymi w stanie równowagi.
- Stan równowagi długookresowej znajdujemy używając jego

definicji definicji, a więc zakładając, że wartość oczekiwana zmiennej zależnej i wartości zmiennych niezależnych są stałe w czasie

$$y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p})$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} = \dots = \mathbf{x}_{t-s}$$

- Wstawiając to do definicji modelu *ADL* otrzymujemy:

$$(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p) y^* = \mu + \mathbf{x}^* \beta_0 + \mathbf{x}^* \beta_1 + \dots + \mathbf{x}^* \beta_s$$

- Dla modelu *ADL* implikuje to, że równowaga długookresowe zachodzi, gdy spełnione są następujące zależności między

zmiennymi:

$$y^* = \mu^* + x^* \beta$$

gdzie $\mu^* = \frac{\mu}{1-\alpha_1-\dots-\alpha_p}$ a $\beta = \frac{\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_s}{1-\alpha_1-\dots-\alpha_p}$.

- Zauważmy, że β jest dokładnie równa mnożnikowi długookresowemu który znaleźliśmy wcześniej
- Dla modelu czysto autoregresyjnego, rozwiązanie długookresowe będzie miało postać

$$y^* = \mu^*$$

Przykład Bezrobocie i podaż pieniądza (kontynuacja). W tym

przykładzie równowaga długookresowa jest dana przez

$$\begin{aligned}y^* &= \frac{3.015409}{1 - .8508812} + \frac{-.1570696}{1 - .8508812}x^* \\ &= 20.222 - 1.0533x^*\end{aligned}$$

Zauważmy, że przy hipotetycznym zerowym wzroście podaży pieniądza bezrobocie ustabilizowałoby się na poziomie 20.222%

Analiza przyczynowości

- Co to jest przyczyna i skutek?
- Cechy przyczynowości
 - zdarzenia wcześniejsze powodują zdarzenia późniejsze
 - nie istnieje wzajemny jednoczesny wpływ przyczynowy
- Przyczynowość w sensie Grangera:

Definicja Zmienna jest przyczyną w sensie Grangera jeśli

bieżące wartości zmiennej y można dokładniej prognozować przy użyciu przeszłych wartości x niż bez ich wykorzystania.

- Natychmiastowa przyczynowość występuje w modelu jeśli występują w nim nieopóźnione wartości x
- Testowanie przyczynowości (test Grangera)

$$y_t = a(t) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

gdzie $a(t)$ jest częścią deterministyczną równania (zależną jedynie od czasu)

- Jeśli $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$, to x nie jest przyczyną w sensie Grangera y

Przykład Bezrobocie i podaż pieniądza (kontynuacja).
 Analizujemy model, w którym nie pojawia się natychmiastowa przyczynowość:

Source	SS	df	MS	Number of obs =	42
Model	445.153629	2	222.576814	F(2, 39) =	200.84
Residual	43.2214946	39	1.10824345	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.9115
				Adj R-squared =	0.9070
Total	488.375123	41	11.9115884	Root MSE =	1.0527

		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
bael							
bael	L1	1.007958	.0673853	14.96	0.000	.8716585	1.144258
m3p							
m3p	L1	.0603557	.061816	0.98	0.335	-.0646789	.1853903
_cons		-.3409437	1.249234	-0.27	0.786	-2.867759	2.185871

- W tym modelu testowanie przyczynowości sprowadza się do przetestowania istotności zmiennej opóźnionej $m3p$
- Zgodnie z uzyskanym wynikiem zmiany podaży pieniądza nie są przyczyną w sensie Grangera zmian bezrobocia!
- Znajomość danych dotyczących zmian podaży pieniądza pochodzących z przeszłości nie może posłużyć do polepszenia prognoz dotyczących bezrobocia

Zgodność MNK dla modeli ADL

- Zmienne objaśniające w modelu ADL muszą być z góry ustalone (egzogeniczne lub endogeniczne opóźnione)
- Jeśli modelu występują opóźnione zmienne zależne i autokorelacja, to wystąpi równoczesność
- Estymator b_{MNK} będzie w tym przypadku nie będzie zgodny
- Z tego powodu w modelach tych trzeba zawsze dążyć do usunięcia autokorelacji

- Do testowania autokorelacji można używać testu Breuscha-Godfrey
- W modelach z częścią autoregresyjną *nie wolno* używać testu DW , daje on w tym przypadku nieprawidłowe wyniki
- Autokorelacje można zazwyczaj usunąć dodając większą liczbę opóźnień

Modele autoregresyjne ze średnią ruchomą

ARMA

- Proces $ARMA(p, q)$ (**A**uto**R**egressive **M**oving **A**verage) można także zapisać następująco

$$y_t = \mu + \underbrace{\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_p y_{t-p}}_{AR} + \underbrace{\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}_{MA}$$

i zakładamy, że innowacje ε_t są nieskorelowane $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$.

- W modelu takim całkowity błąd losowy $u_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$ są skorelowane.

- Jeśli $q = 0$, to model $AR(p)$, można wyestymować MNK .
- Jeśli $q \neq 0$, estymatory MNK asymptotycznie obciążone (równoczesność).
- Należy zastosować estymatory MNW (Metodę Największej Wiarygodności).
- Do testowania hipotez można zastosować testy LM , LR lub W .
- Ustalenie wielkości parametrów p i q .
 - kryteria informacyjne

– od ogólnego do szczegółowego

Funkcje *ACF* i *PACF*

- **Funkcja autokorelacji *ACF* (Autocorrelation Function)**
- Funkcja *ACF* dla pewnego k , oznaczane jako ρ_k , jest równa

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\text{Var}(y_t)}$$

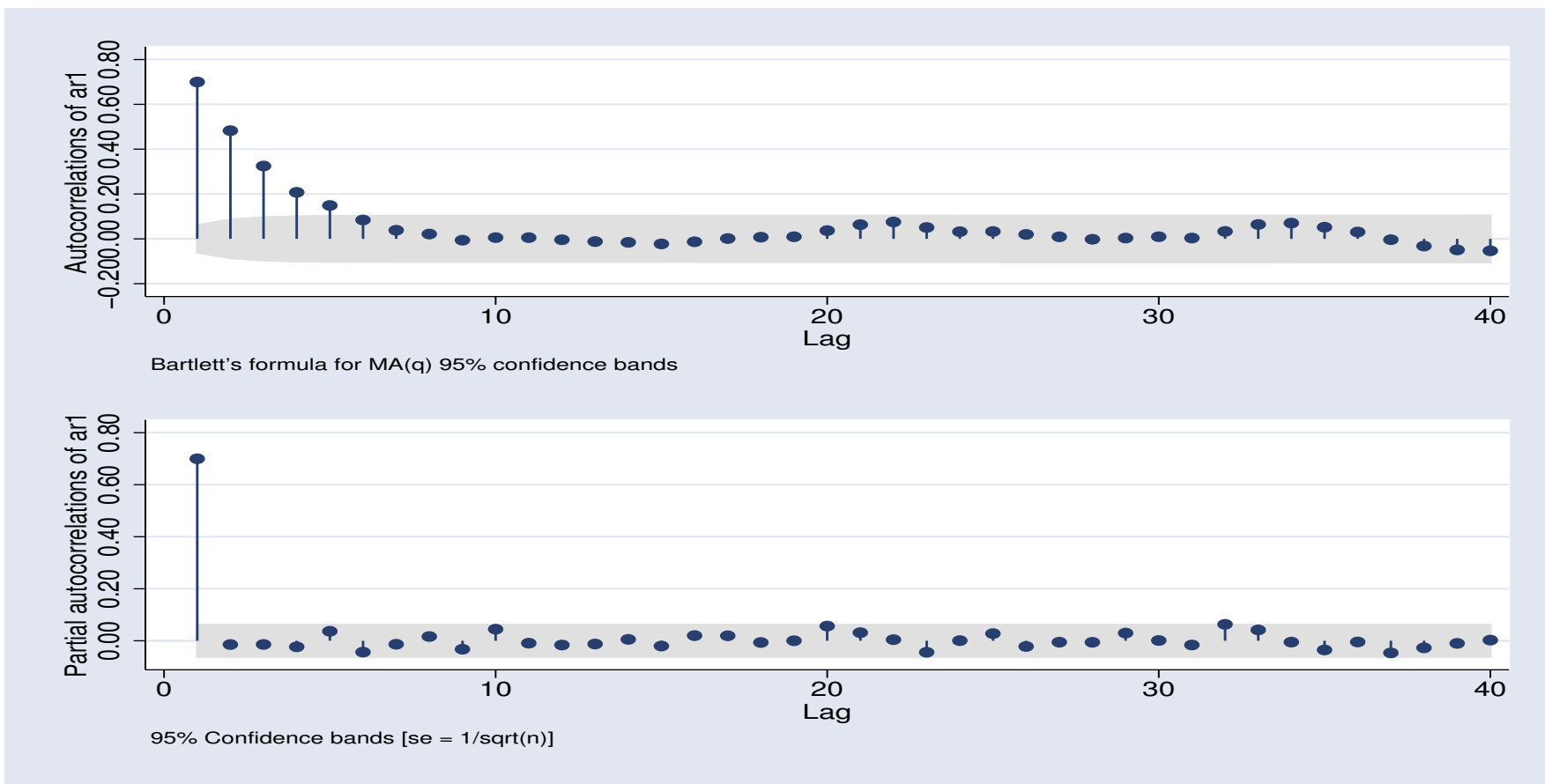
- Funkcja autokorelacji pozwala stwierdzić jak silna jest korelacja między poszczególnymi realizacjami zmiennej y_t .

- **Funkcja autokorelacji cząstkowej $PACF$ (Partial Autocorrelation Function).**
- Funkcja $PACF$ dla pewnego k , oznaczana jako α_{kk} , jest równa wyestymowanemu współczynnikowi α_k w modelu $AR(k)$

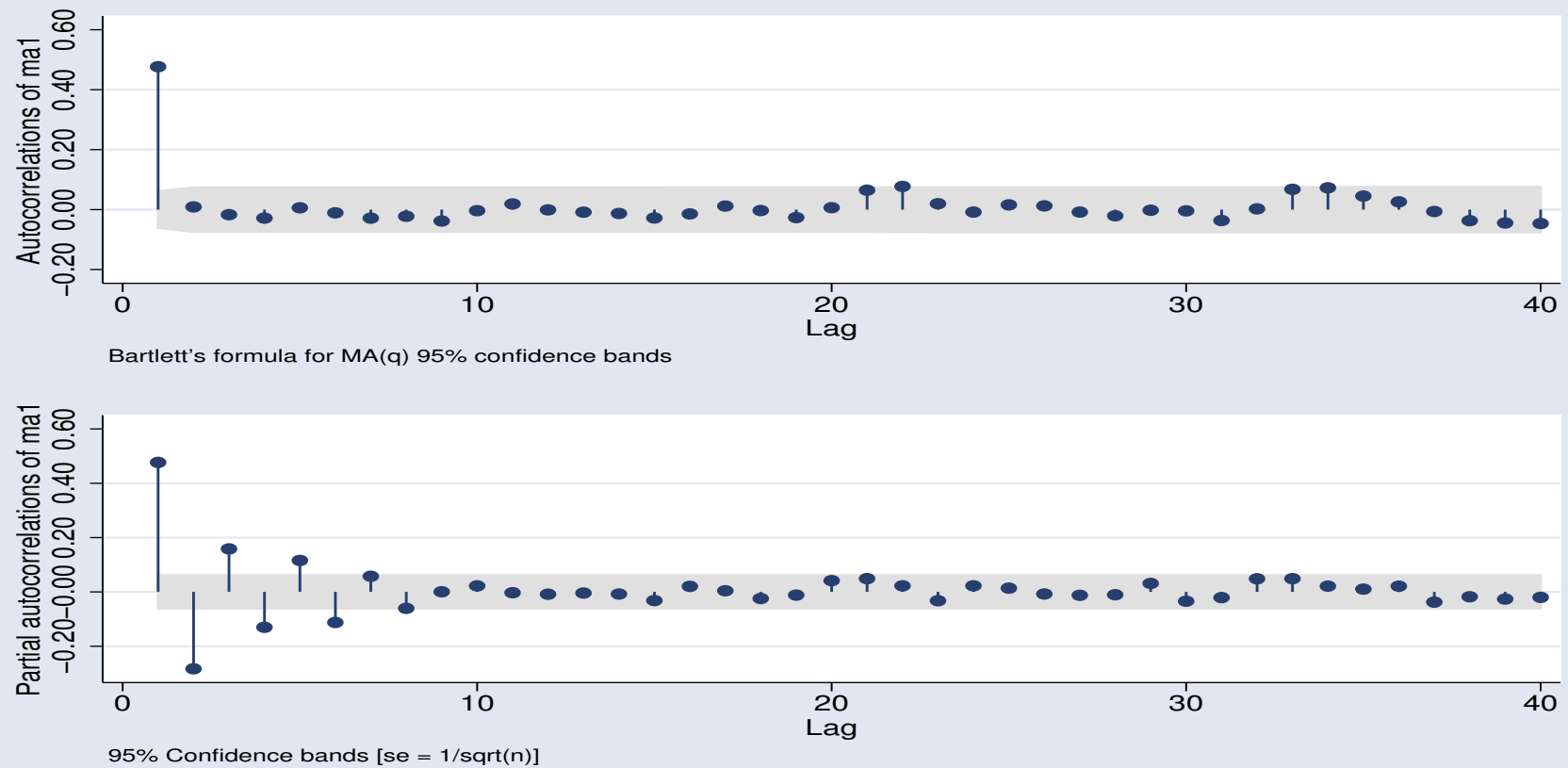
$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Funkcja autokorelacji cząstkowej pozwala zbadać istotność odległych opóźnień.
- Kształty funkcji ACF i $PACF$ zależą od wielkości parametrów p i q .

- Wykresów ACF i $PACF$ używa się do celów diagnostycznych.
- Można udowodnić, że:
- W przypadku, gdy $p > 0$
 - * funkcja ACF maleje wykładniczo
 - * funkcja $PACF$ istotna jedynie dla p pierwszych wartości α_{kk}
- W przypadku gdy $q > 0$
 - funkcja ACF istotna dla pierwszych q wartości ρ_k
 - funkcja $PACF$ maleje wykładniczo



- ACF i $PACF$ dla procesu $AR(1)$



- ACF i $PACF$ dla procesu $MA(1)$

- Wielkość p i q można mniej więcej oszacować na podstawie kształtu funkcji ACF i $PACF$
- Przy ostatecznym ustalaniu wielkości p i q lepiej posłużyć się formalnymi procedurami testowania
- Jeśli funkcja ACF i $PACF$ nie maleje powinniśmy d razy zróżnicować y_t , tak by ACF i $PACF$ zaczęły maleć - ilość takich różnicowań można także ustalić na podstawie testów
- Jeśli w ACF i $PACF$ pojawiają się regularne skoki w krotnościach równych próbkowaniu danych (np. dla danych kwartalnych w wielokrotnościach 4), sugerować to będzie

sezonowość. Można ją usunąć stosując różnicowanie
sezonowe

Dobór parametrów p i q w modelu $ARMA(p, q)$

- Model $ARMA(p, q)$

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Nie znamy wielkości p, q .
- Możemy uzyskać zgodne oszacowania tylko wtedy jeśli w modelu nie występuje autkorelacja.
- Celem jest znalezienie takiego modelu, który miałby możliwie

mało parametrów (małe p, q), i w którym nie występuje autokorelacja.

- Obecnie najczęściej stosuje się do tego metodę od ogółego do szczegółowego lub kryteria informacyjne.
- Metoda od ogólnego do szczegółowego:
 1. wybieramy największe sensowne p, q (zazwyczaj wystarczy $p = 3, q = 3$)
 2. testujemy sekwencyjnie łączną nieistotność coraz większej liczby ostatnich opóźnień (n.p. $\alpha_3 = 0$ i $\theta_3 = 0$, następnie $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$ i $\theta_3 = 0$, następnie $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$ i $\theta_3 = \theta_2 = 0$ etc.)

3. Wybieramy pierwszy model, dla którego musieliśmy odrzucić H_0 o nieistotności opóźnień
- Kryteria informacyjne: spośród modeli wybieramy ten, dla którego wartość kryterium informacyjnego była najniższa.
 - Na koniec testujemy, czy reszty nie są skorelowane - możemy do tego użyć testu *partmanteau* nazywanego także testem Ljunga-Boxa, H_0 : zmienne jest białym szumem (ciągą nieskorelowanych zmiennych losowych)

Prognozowanie za pomocą $ARMA(p, q)$ (prognozy dynamiczne)

- Proste narzędzie służące do prognozowania przyszłych y_t
- Szczególną zaletą tej metodologii prognozowania jest jej prostota
- Rozpatrzmy wzór na y_{t+1}

$$\begin{aligned} y_{T+1} = & \mu + \alpha_1 y_T + \alpha_p y_{T-p+1} \\ & + \epsilon_{T+1} + \theta_1 \epsilon_T + \dots + \theta_q \epsilon_{T-q+1} \end{aligned}$$

- Wartość ε_{t+1} jest niemożliwa do oszacowania (ε_t są nieskorelowane w czasie) więc ją pomijamy
- $\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q+1}$ zastępujemy przez ich oszacowania $e_t, \dots, e_{t-q+1}$
- Oczywistym wzorem na prognozę y_t dla okresu $T+1$ jest więc:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+1} = & \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 y_T + \hat{\alpha}_2 y_{T-1} + \dots + \hat{\alpha}_p y_{T-p+1} \\ & + \hat{\theta}_1 e_T + \hat{\theta}_2 e_{T-2} + \dots + \hat{\theta}_q e_{T-q+1}\end{aligned}$$

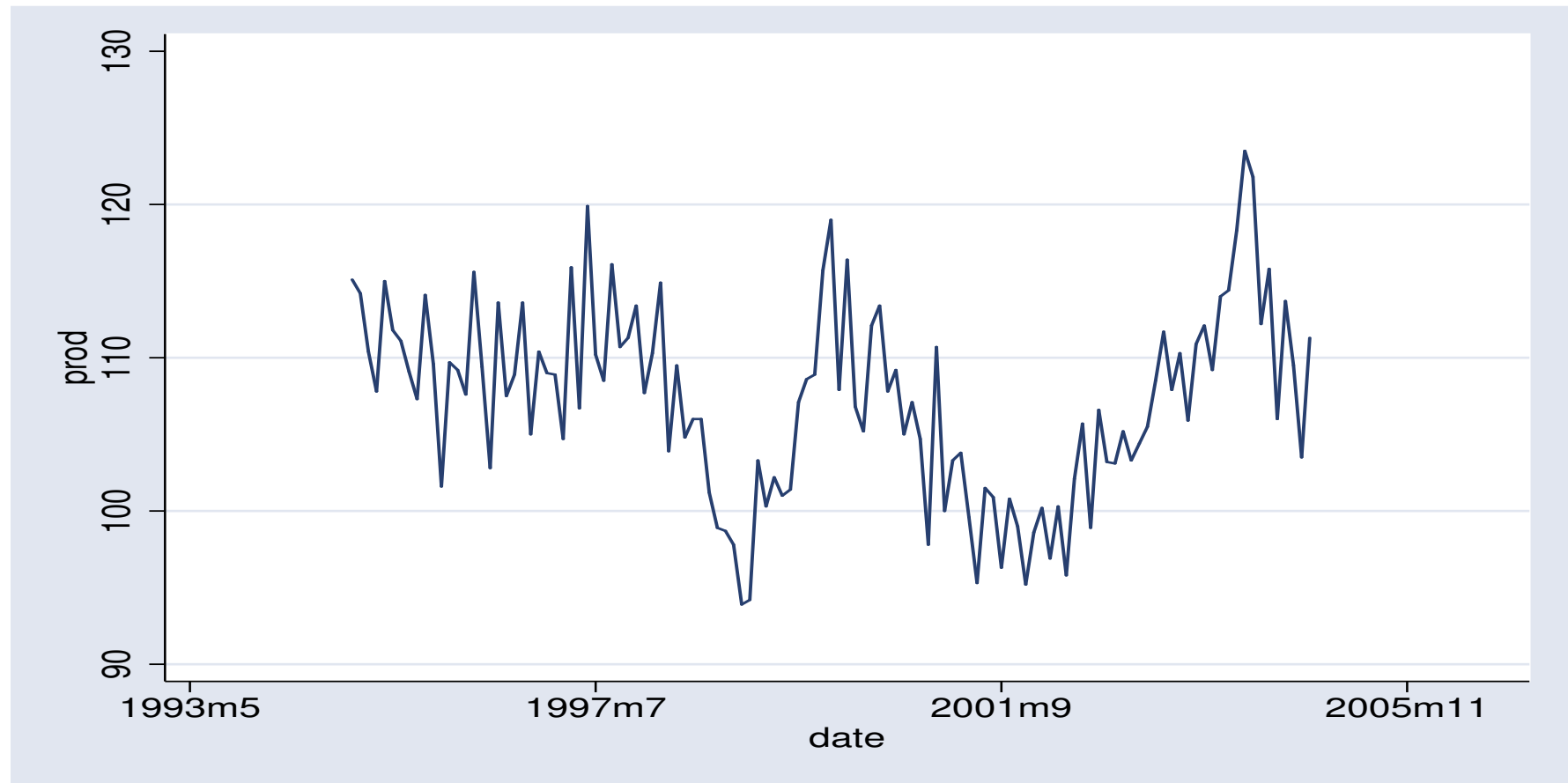
- Po to, by sformułować prognozę, y_t na okres $t + 2$ możemy

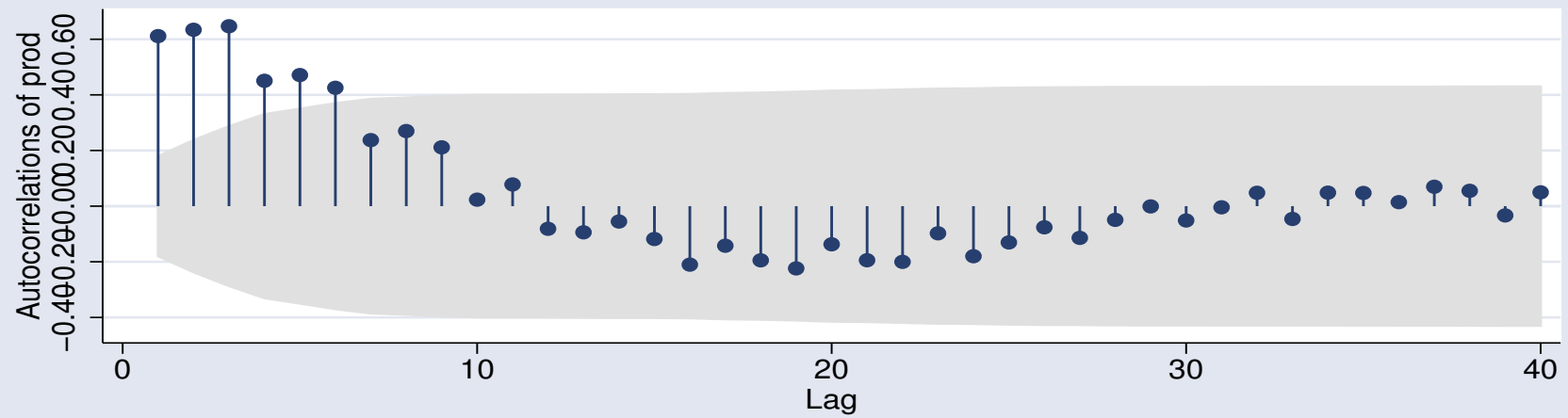
posłużyć prognozą dla $\hat{y}_{t+1}$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+2} = & \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_{T+1} + \hat{\alpha}_2 y_T + \dots + \hat{\alpha}_p y_{T-p+2} \\ & + \hat{\theta}_2 e_T + \dots + \hat{\theta}_q e_{T-q+2}\end{aligned}$$

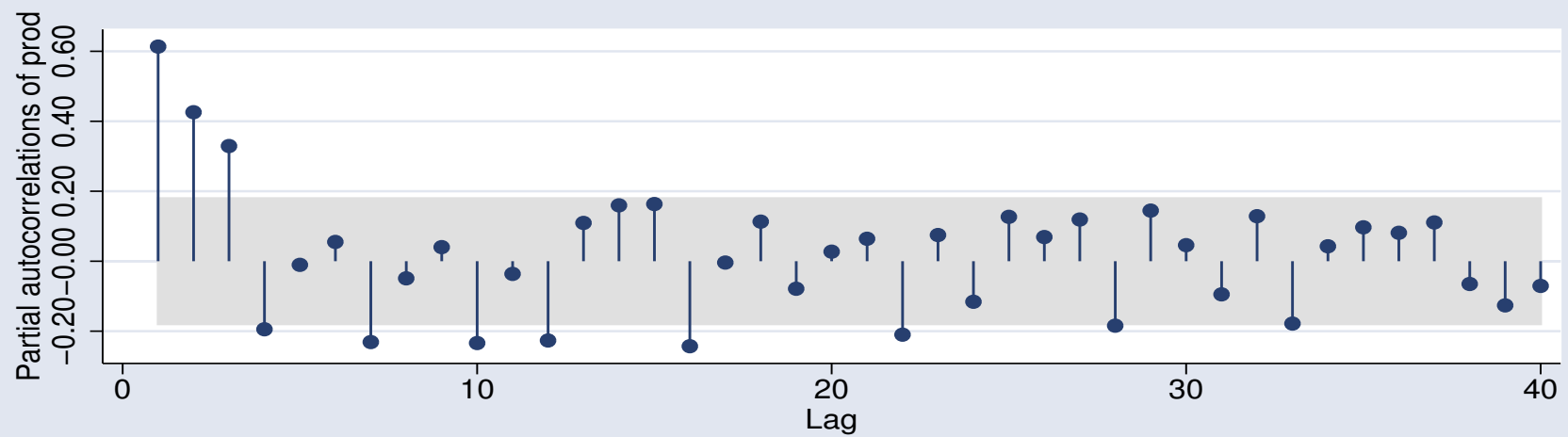
- Prognozę dla $\hat{y}_{T+s}$ uzyskujemy podstawiając za $y_{T+1}, \dots, y_{T-p+s}$ rekurencyjnie policzone prognozy $\hat{y}_{T+1}, \dots, \hat{y}_{T-p+s}$
- Dla dużych s wpływ $y_T, y_{T-1}, \dots$ i $\epsilon_T, \epsilon_{T-1}, \dots$ na y_{T+s} maleje do zera
- Z tego powodu prognozy wygenerowane dla procesu $ARMA$ zbiegają do równowagi długookresowej $y^* = \mu^* = \frac{\mu}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_k}$

Przykład Produkcja przemysłowa dane GUS z lat 1995.1-2004.11





Bartlett's formula for MA(q) 95% confidence bands



95% Confidence bands [se = $1/\sqrt{n}$]

ARIMA regression

Sample: 1995m1 to 2004m11

Number of obs = 119

Wald chi2(6) = 2267.22

Log likelihood = -335.374

Prob > chi2 = 0.0000

		OPG					
prod		Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
-----+-----							
prod							
_cons		107.0719	1.252109	85.51	0.000	104.6178	109.526
-----+-----							
ARMA							
ar							
	L1	.8909644	.2032586	4.38	0.000	.4925849	1.289344
	L2	.4046551	.2850941	1.42	0.156	-.1541191	.9634293
	L3	.1178646	.1404046	0.84	0.401	-.1573233	.3930525
	L4	-.4611442	.1297907	-3.55	0.000	-.7155293	-.206759
ma							
	L1	-.6462826	.237619	-2.72	0.007	-1.112007	-.1805579
	L2	-.2006868	.253507	-0.79	0.429	-.6975515	.2961779
-----+-----							

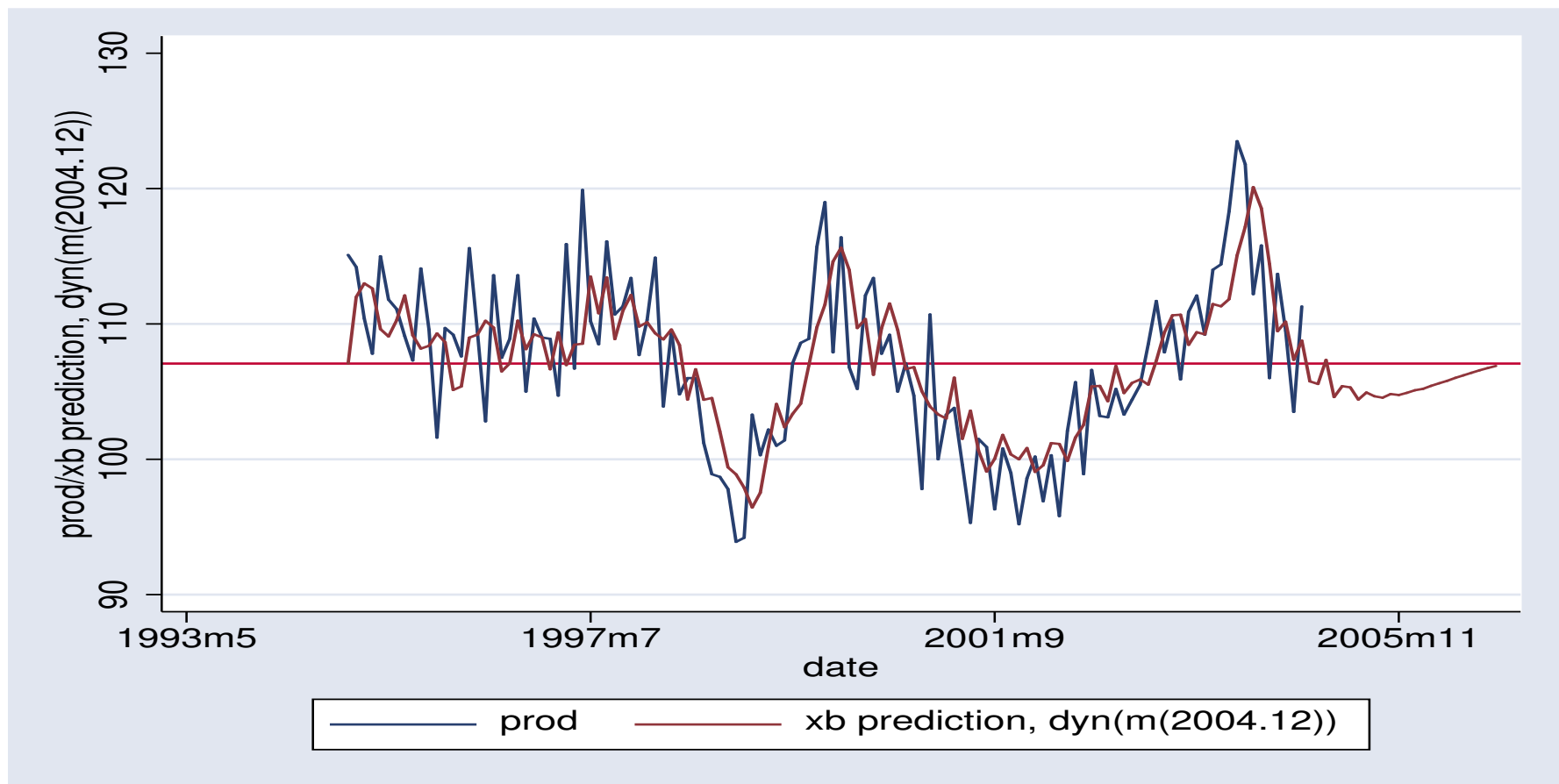
/sigma	4.026565	.2953044	13.64	0.000	3.44778	4.605351
--------	----------	----------	-------	-------	---------	----------

- Wynik testu portmanteau (Ljung-Box)

Portmanteau test for white noise

Portmanteau (Q) statistic =	42.1085
Prob > chi2(40) =	0.3798

- Nie ma podstaw do odrzucenia H_0 , że reszty są białym szumem



- Prognozy z modelu $ARMA$