

- Estymator M

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} S_n(\theta)$$

- Funkcja celu

$$S_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho(Y_i, X_i, \theta)$$

często pomijamy argumenty Y_i, X_i i piszemy $\rho_i(\theta)$.

- Załóżmy, że $\mathbb{E}[\rho(Y, X, \theta)] \leq \infty$.

$$S(\theta) = \mathbb{E}[S_n(\theta)] = \mathbb{E}[\rho(Y, X, \theta)]$$

- Minimum w populacji

$$\theta_0 = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} S(\theta)$$

- Parameter θ jest zidentyfikowany jeśli θ_0 jest unikalny.

Przykłady estymatorów M

- 1 Metoda Najmniejszych Kwadratów $\rho_i(\theta) = (Y_i - X_i'\theta)^2$
- 2 Nieliniowa MNK $\rho_i(\theta) = (Y_i - m(X_i, \theta))^2$
- 3 Estymator bezwzględnych odchyleń $\rho_i(\theta) = |Y_i - X_i'\theta|$
- 4 Regresja kwantylowa $\rho_i(\theta, \tau) = \rho_\tau(Y_i - X_i'\theta)$ where $\rho_\tau(x) = x(\tau - 1 \{x < 0\})$
- 5 Estymator MNW $\rho_i(\theta) = -\ln f(Y_i | X_i, \theta)$

- $S_n(\theta)$ zbiega do $S(\theta)$ jednostajnie, dla $\theta \in \Theta$ jeśli dla $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\theta \in \Theta} |S_n(\theta) - S(\theta)| \xrightarrow{p} 0$$

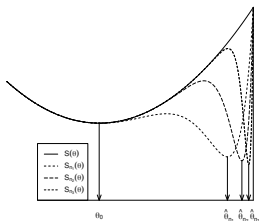
- Do dowodzenia jednostajnej zbieżności używamy Jednostajnego Prawa Wielkich Liczb

Twierdzenie

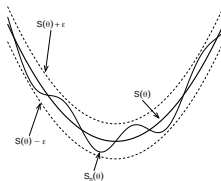
$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$ dla $n \rightarrow \infty$ jeśli

- 1 $S_n(\theta)$ zbiega według prawdopodobieństwa do $S(\theta)$ jednostajnie dla $\theta \in \Theta$.
- 2 θ_0 unikalnie maksymalizuje $S(\theta)$.

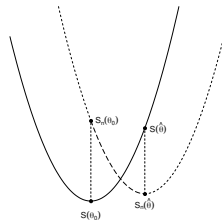
Jednostajna zbieżność



(a) Non-Uniform Convergence



(b) Uniform Convergence



(c) Consistency

Source: Hansen (2022)

Dowód zgodności

- Najpierw dowiedzimy, że

$$S(\hat{\theta}) - S(\theta_0) \xrightarrow{P} 0$$

jest implikowana przez zbieżność $S_n(\theta)$.

- Rzeczywiście:

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(\hat{\theta}) - S(\theta_0) \\ &= S(\hat{\theta}) - S_n(\hat{\theta}) + S_n(\theta_0) - S(\theta_0) + S_n(\hat{\theta}) - S_n(\theta_0) \\ &\leq S(\hat{\theta}) - S_n(\hat{\theta}) + S_n(\theta_0) - S(\theta_0) \\ &\leq 2 \sup_{\theta \in \Theta} |S_n(\theta) - S(\theta)| \end{aligned}$$

Dowód zgodności

- Druga nierówność wynika z tego, że

$$S_n(\hat{\theta}) - S_n(\theta_0) \leq 0,$$

ponieważ $S_n(\hat{\theta})$ jest minimalizowana przez $\hat{\theta}$

- Co więcej

$$\sup_{\hat{\theta} \in \Theta} |S_n(\hat{\theta}) - S(\hat{\theta})| = \sup_{\theta_0 \in \Theta} |S_n(\theta_0) - S(\theta_0)| = \sup_{\theta \in \Theta} |S_n(\theta) - S(\theta)|$$

a zatem

$$S(\hat{\theta}) - S_n(\hat{\theta}) + S_n(\theta_0) - S(\theta_0) \leq 2 \sup_{\theta \in \Theta} |S_n(\theta) - S(\theta)|.$$

Dowód zgodności

- W drugim kroku dowodu pokazujemy, że $S(\hat{\theta}) - S(\theta_0) \xrightarrow{P} 0$ implikuje, że $\theta \xrightarrow{P} \theta_0$
- Rzeczywiście założenie o istnieniu minimum globalnego implikuje, że dla $\|\hat{\theta} - \theta_0\| > \epsilon > 0$ funkcja $S(\hat{\theta}) - S(\theta_0) > \delta > 0$.

- Zatem

$$\mathbb{P} [\|\theta_0 - \hat{\theta}\| > \epsilon] \leq \mathbb{P} [|S(\hat{\theta}) - S(\theta_0)| > \delta]$$

- a ponieważ dowiedliśmy, że

$$\mathbb{P} [|S(\hat{\theta}) - S(\theta_0)| > \delta] \rightarrow 0$$

$$S(\hat{\theta}) - S(\theta_0) \xrightarrow{P} 0$$

- W efekcie

$$\mathbb{P} [\|\theta_0 - \hat{\theta}\| > \epsilon] \rightarrow 0$$

$$\theta \xrightarrow{P} \theta_0$$

Twierdzenie

Założmy, że

- 1 (Y_i, X_i) są IID,
- 2 $\rho(Y, X, \theta)$ jest ciągła dla $\theta \in \Theta$ z prawdopodobieństwem 1,
- 3 $|\rho(Y, X, \theta)| \leq G(Y, X)$ gdzie $\mathbb{E}(G(Y, X)) < \infty$,
- 4 Θ jest zbiorem zwartym,

wtedy

$$\sup_{\theta \in \Theta} |S_n(\theta) - S(\theta)| \xrightarrow{p} 0$$



Hansen, B. (2022). *Econometrics*. Princeton University Press.
ISBN: 9780691235899.